复数与复变函数

复数是实数域的扩充.

定义 1. 设 $a, b \in \mathbb{R}$，定义虚数单位 i 满足 $\mathrm{i}^2 = -1$. 称 $z = a + \mathrm{i}b$ 为**复数**，a，b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作 $\operatorname{Re} z = a$，$\operatorname{Im} z = b$.

复数的四则运算如下.

$$(a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) = (a \pm c) + \mathrm{i}(b \pm d),$$

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc),$$

若 $c + \mathrm{i}d \neq 0$，则

$$\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

定义 2. 设 $z = a + \mathrm{i}b$，称 $a - \mathrm{i}b$ 为 z 的**共轭**，记作 $\overline{z}$.

定义 3. 设 $z = a + \mathrm{i}b$，称 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为 z 的**模**，记作 $|z|$.

定义 4. 对于平面上给定的直角坐标系，复数 $z = a + \mathrm{i}b$ 可以用坐标为 (a, b) 的点表示. 第一个坐标称为**实轴**，第二个坐标称为**虚轴**，所在的平面称为**复平面**.

复数可以表示为一点，或者从原点指向该点的向量，可以用极坐标表示.

定义 5. 设复数 $z = a + \mathrm{i}b = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$，则 $r = |z|$ 是复数 z 的**模**. 当 $z \neq 0$ 时，称 φ 为 z 的**辐角**.

注. $z = 0$ 时，辐角无意义.

设 $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$，$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$，则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

非零复数 z 的辐角有无数个，将 z 的全体辐角记作 $\operatorname{Arg} z$. 将辐角范围取为 $0 \leqslant \varphi < 2\pi$，称为 z 的**主辐角**，记作 $\arg z$.

下面介绍复球面. 取一个在原点 O 与复平面相切的球面，通过点 O 作一条与复平面垂直的直线交球面于点 N，称 N 点为北极点. 取复平面上任一点 z，用直线与 N 点相连，交球面于一点 $P(z)$，于是建立了复平面到球面上的双射.

在复平面上，以原点 O 为圆心的圆 C 上的点，通过双射，在球面上也是一个圆 $\mathit{\Gamma}$（纬线）. 当 C 的半径增大时，$\mathit{\Gamma}$ 就越接近北极点 N. 我们有一个假想点 ∞ 与北极点 N 对应，称这个假想点为**无穷远点**. 添加无穷远点后的复平面称为**扩充复平面**. 扩充复平面与整个球面是一一对应的.

先研究单值的复变函数.

定义 6. 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续复值函数 $\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 称为**曲线**，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为 t 的连续实函数. $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 称为曲线 $\gamma(t)$ 的**端点**. 若 $\gamma(a)=\gamma(b)$，则称 $\gamma(t)$ 为**闭曲线**. 曲线的**方向**定义为 t 增加的方向. 若 $\gamma'(t)$ 存在且连续，则称 $\gamma(t)$ 为**光滑曲线**.

定义 7. 若仅当 $t_1=t_2$ 时 $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称 $\gamma(t)$ 为**简单曲线**或 **Jordan 曲线**.

定义 8. 复平面上的一个非空连通开集 D 称为一个**域**.

定理 1 (Jordan)**.** 一条简单闭曲线 γ 将复平面分为两个域，其中一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部，γ 是这两个域的共同边界.

注. *定理是容易接受的，证明需要拓扑等知识，在此述而不证.*

定义 9. 若 $D\subset\mathbb{C}$ 是域，$f(z):D\to\mathbb{C}$ 称为**复变函数**.